نام و نام خانوادگی : .....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : .....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۵/۲/۹**

وقت : **۷۵** دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۱-فنی (۸ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / دوم) **۱۳۹۵- ۱۳۹۴**

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱ – معادله‌های زیر را حل کنید : **۱۰+۱۰ نمره**

$$z+\bar{z}=\frac{\bar{z}}{z} \qquad\qquad iz^{۳}+۸=۰$$

سوال۲ – تابع $f(x)=۲x+۳$ داده شده است. ضابطه تابع $g(x)$ را چنان بیابید که داشته باشیم :

$$g\circ f(x)=۸x^{۲}+۲۲x+۲۰$$ **۱۰ نمره**

سوال۳ – مقدار a را چنان بیابید که تابع زیر در بازه $(۰,۲\pi)$ پیوسته باشد. **۱۵ نمره**

$$f(x)=\begin{cases} a\cos\frac{۲x}{۳} & ۰<x\le\pi \\ \frac{\sqrt{۱+\cos x}}{x-\pi} & \pi<x<۲\pi \end{cases}$$

سوال۴ – نقطه $M=(-۴,۲)$ بر منحنی تابع $x=-y^{۲}$ واقع است.

خط مماس بر منحنی در این نقطه و محورهای مختصات یک مثلث می سازند.

مساحت مثلث را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۵ – نمودار تابع $y=\frac{۲x^{۲}-۶x+۹}{x^{۲}-۶x+۹}$ را رسم کنید. **۲۰ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس ریاضی۱-فنی (۸ گروه هماهنگ)
نیمسال دوم ۹۵-۱۳۹۴

جواب سوال۱: حل معادله اول :

$$iz^{۳}+۸=۰ \rightarrow z^{۳}=۸i=۸e^{(۲k\pi+\frac{\pi}{۲})i} \rightarrow z_k=۲e^{(\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶})i} \ , \ k=۰,\pm۱,\pm۲,\cdots$$

سه ریشه متمایز معادله عبارتند از : $z_۰=۲e^{\frac{\pi}{۶}i}=\sqrt{۳}+i \ , \quad z_۱=۲e^{\frac{۵\pi}{۶}i}=-\sqrt{۳}+i \ , \quad z_۲=۲e^{\frac{۹\pi}{۶}i}=۲e^{\frac{۹\pi}{۶}i}=-۲i$

برای حل معادله دوم ، قرار می دهیم $z=x+yi$

روش اول : داریم : $(x+yi)+(x-yi)=\dfrac{x-yi}{x+yi} \rightarrow ۲x=\dfrac{x-yi}{x+yi} \rightarrow ۲x^{۲}+۲xyi=x-yi$

اکنون باید داشته باشیم : $۲x^{۲}=x$ و $۲xy=-y$

از معادله اول نتیجه می‌شود که باید $x=۰$ یا $x=\frac{۱}{۲}$ و از معادله دوم داریم $y=۰$ یا $x=-\frac{۱}{۲}$

اگر $x=۰$ آنگاه $y=۰$ یعنی $z=۰$. اما $z=۰$ جواب معادله نیست.

بنابر این $x=\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $y=۰$. یعنی $z=\frac{۱}{۲}$ تنها جواب معادله است.

روش دوم : داریم : $|z+\bar{z}|=\left|\dfrac{\bar{z}}{z}\right| \rightarrow |۲x|=\dfrac{|\bar{z}|}{|z|}=۱ \rightarrow x=\pm\frac{۱}{۲}$

اما $x=-\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $۲x=\dfrac{\bar{z}}{z}=-۱$ یعنی $z+\bar{z}=۰$ که تناقض است پس $x=\frac{۱}{۲}$ که نتیجه می دهد $z=\bar{z}$ یعنی $z=\frac{۱}{۲}$.

جواب سوال۲ : روش اول : تابع f وارون دارد. آن را پیدا می کنیم : $f^{-۱}(x)=\dfrac{x-۳}{۲}$

اکنون داریم : $g(x)=g\circ f\circ f^{-۱}(x)=g\circ f(\frac{x-۳}{۲})=۸(\frac{x-۳}{۲})^{۲}+۲۲(\frac{x-۳}{۲})+۲۰$

و در نتیجه : $g(x)=۸(\dfrac{x^{۲}-۶x+۹}{۴})+۲۲(\dfrac{x-۳}{۲})+۲۰=۲x^{۲}-۱۲x+۱۸+۱۱x-۳۳+۲۰ \rightarrow g(x)=۲x^{۲}-x+۵$

روش دوم : از ظاهر توابع داده شده می توان حدس زد که $g(x)=ax^{۲}+bx+c$ بنابر این

$$g\circ f(x)=a(۲x+۳)^{۲}+b(۲x+۳)+c=۴ax^{۲}+(۱۲a+۲b)x+(۹a+۳b+c)$$

از مقایسه این عبارت با عبارت داده شده داریم : $۴a=۸ \ , \ ۱۲a+۲b=۲۲ \ , \ ۹a+۳b+c=۲۰$

که نتیجه می‌دهد $a=۲ \ , \ b=-۱ \ , \ c=۵$ و در نهایت داریم : $g(x)=۲x^{۲}-x+۵$

جواب سوال۳: این تابع در تمام نقاط مجموعه $(۰,\pi)\bigcup(\pi,۲\pi)$ پیوسته است. برای اینکه در $x=\pi$ پیوسته باشد باید داشته باشیم :

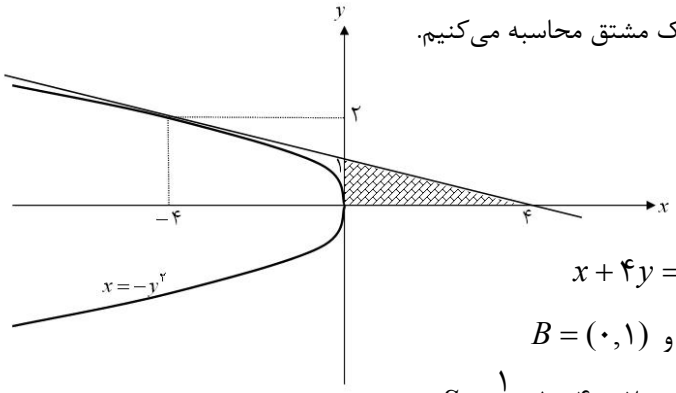
$$f(\pi)=\lim_{x\to\pi^-}f(x)=\lim_{x\to\pi^+}f(x)$$

داریم : $f(\pi)=a\cos\dfrac{۲\pi}{۳}=\dfrac{-a}{۲} \ , \ \lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}a\cos\dfrac{۲x}{۳}=a\cos\dfrac{۲\pi}{۳}=\dfrac{-a}{۲} \ , \ \lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\sqrt{۱+\cos x}}{x-\pi}$

برای محاسبه $\lim\limits_{x\to\pi^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\sqrt{۱+\cos x}}{x-\pi}$ تغییر متغیر $x=t+\pi$ را اعمال می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\pi^+}f(x)=\lim_{t\to۰^+}\frac{\sqrt{۱+\cos(t+\pi)}}{t}=\lim_{t\to۰^+}\frac{\sqrt{۱-\cos t}}{t}=\lim_{t\to۰^+}\frac{\sqrt{۲\sin^{۲}(t/۲)}}{t}=\lim_{t\to۰^+}\frac{\sqrt{۲}\sin(t/۲)}{t}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

اکنون باید داشته باشیم $\dfrac{-a}{۲}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$ یعنی : $a=-\sqrt{۲}$



جواب سوال۴ : برای نوشتن معادله خط مماس ، شیب آن را به کمک مشتق محاسبه می‌کنیم.

$$x=-y^۲ \;\rightarrow\; ۱=-۲yy' \;\rightarrow\; y'=\frac{-۱}{۲y}$$

$$\rightarrow\; m=y'(M)=\frac{-۱}{۴}$$

معادله خط مماس عبارت است از $y-۲=\frac{-۱}{۴}(x+۴)$ و یا : $x+۴y=۴$

نقاط تقاطع این خط و محورهای مختصات عبارتند از : $A=(۴,۰)$ و $B=(۰,۱)$

مثلث مورد نظر یک مثلث قائم الزاویه است و مساحت آن برابر است با : $S=\frac{۱}{۲}\times ۱\times ۴=۲$

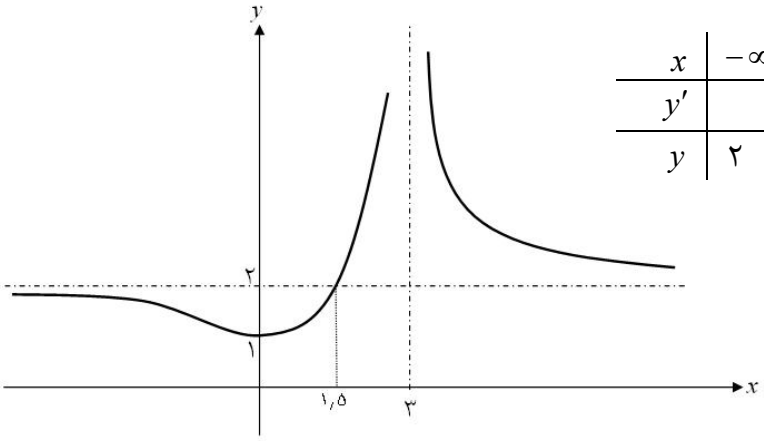
جواب سوال۵ : ضابطه تابع را می‌توان به شکلهای ساده تری هم نوشت. $y=۱+\frac{x^۲}{x^۲-۶x+۹}$ و یا $y=۱+(\frac{x}{x-۳})^۲$

بنابر این دامنه تابع برابر است با $D_f=\mathbf{R}-\{۳\}$ و داریم $\left|\begin{matrix} x\to\pm\infty \\ y=۲\end{matrix}\right.$, $\left|\begin{matrix} x\to ۳ \\ y\to\infty\end{matrix}\right.$

$x=۳$ مجانب قائم و $y=۲$ مجانب افقی نمودار است.

مشتق تابع و ریشه های مشتق را محاسبه می کنیم $y'=\frac{-۳x}{(x-۳)^۳}$ اگر $y'=۰$ آنگاه $x=۰$ یعنی نقطه $(۰,۱)$ یک نقطه اکسترمم تابع است. (در حقیقت یک نقطه مینیمم نسبی تابع است .)

اکنون جدول تغییرات را کامل می کنیم.

x	$-\infty$		۰		۳		∞
y'		$-$	۰	$+$		$-$	
y	۲	↘	۱	↗	∞ | ∞	↘	۳

به کمک جدول تغییرات نمودار تابع را رسم می کنیم.